4.1. PROBLEMLER

4.1.1. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız ve bu kısmı türev fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\ln(x-y)$, c) $f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$

4.1.2. Aşağıda verilen fonksiyonlar için $f_x(1,1)$, $f_{xx}(1,0)$, $f_{yy}(1,1)$ ve $f_{xy}(1,1)$ değerlerini bulunuz ve geometrik olarak yorumlayınız.

a) $z=f(x,y)=x^2y+xy^2$, b) $f(x,y)=xe^{xy}$ d) $f(x,y)=x^y$

4.1.3. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında belirtilen kısmi türevlerini hesaplayınız.

a) $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, z_{xx}, z_{xy}, *b)* $z=x^y$, z_{yx} *c)* $f(x,y)=x^2e^{2y}$, f_{yx}

d) $w=\sin(xy+z)$, w_{xyz}, w_{yyx} *e)* $w=e^{xyz}$, w_{xy} *f)* $w=xy\ln(yz)$, w_{zx}

4.1.4. $v=[\sin(akx)][\sin(kt)]$ fonksiyonunun $v_{tt}=av_{xx}$ kısmi diferensiyel denklemini sağladığını gösteriniz.

4.1.5. $z=xe^{\frac{y}{x}}$ fonksiyonunun $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ kısmi diferensiyel denklemini sağladığını gösteriniz.

4.1.6.

a) $z=e^{xy}$ ise $z_{xx}+_{yy}=\frac{1}{z}(z_x^2+z_y^2)$ olduğunu gösteriniz.

b) $u=\sin 2x\cos 2ct$ ise $u_{tt}=c^2u_{xx}$ olduğunu gösteriniz.

c) $w=z^{xy^2}$ ise w_x, w_y ve w_z kısmî türevlerini hesaplayınız.

4.1.7. $f(x,y,z)=F(x,y)G(y,z)$ ise f_x, f_y ve f_z yi bulunuz.

4.1.8. Aşağıda verilmiş olan fonksiyonların her birinin diferensiyelini hesaplayınız.

a) $f(x,y)=x^3+5xy^2$ *b)* $w=e^x\sin y+zx$ *c)* $z=x^y$, $x>0$

d) $w=\arctan\frac{yz}{x}$ *e)* $w=x\cos(2yz^2)$ *f)* $w=\ln(3x^2-yz)$

4.1.9. $f(x,y)=x^2+xy^3$ ise aşağıdaki diferensiyel ve artmaları bulunuz.

a) $df(1,2;\ 0.1,-0.02)$,. $\Delta f(1,2;\ 0.1,-0.02)$

c) $df_{(0,-1)}(0.03,0.2)$, *c)* $\Delta f(0,-1;\ 0.03,-0.2)$

4.1.10. $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ nin $(2.2, -0.2)$ deki yaklaşık değerini bulunuz.

4.1.11. a) $z = f(x,y)$ yüzeyi ile $y = y_0$ düzleminin arakesit eğrisi C olsun. Bu eğrinin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğetinin denkleminin

$$y = y_0, \quad z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$

olduğunu gösteriniz.

b) C, $z = f(x,y)$ yüzeyi ile $x = x_0$ düzleminin arakesit eğrisi ise bu eğrinin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğetinin denkleminin

$$x = x_0, \quad z - z_0 = f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

olduğunu gösteriniz.

4.1.12. $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ yüzeyi ile $x = 2$ düzleminin arakesit eğrisi C olsun. C nin $p = (2,1,5)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

4.1.13. Aşağıda verilmiş $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları için $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ olduğunu gösteriniz (Bu denklemlere Cauchy-Riemann denklemleri denir).

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad u(x,y) &= e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y; \\ \text{b)} \quad u(x,y) &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \quad v(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}$$

4.1.14. f; düzlemde açık bir D bölgesinde tanımlı ve bu bölgede kısmi türevleri mevcut olsun.

a) $f_x(x,y) = 0$ ise f hakkında ne söyleyebilirsiniz?
b) $f_y(x,y) = 0$ ise f hakkında ne söyleyebilirsiniz?
c) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ ise f hakkında ne söyleyebilirsiniz?

4.1.15. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin belirttiği yüzeyin verilen noktalardaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

a) $f(x,y) = x + xy + y^2, \quad (1,1,3)$
b) $f(x,y) = (x-y)^2, \quad (1,0,1)$
c) $f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}, \quad (\pi/2, \pi/2, -1)$
d) $f(x,y) = x + yz^2, \quad (1,0,2,1)$

4.1.16. Problem 15 deki her bir yüzeyin belirtilen noktadaki normal doğrusunun denklemini bulunuz ($z = f(x,y)$ yüzeyinin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki normal doğrusu, (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve $N = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ normal vektöüne paralel olan doğrudur).

4.1.17. $f(x,y) = x^3y^4$ nin grafiğinin $(-1, 2, -16)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

4.1.18. $f(x,y) = e^{2x}\sin y$ ise f nin $(x,y) = (2, \pi/6)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normalinin denklemini bulunuz.

4.1.19. $f(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ 'in belirttiği düzleme hangi yatay düzlem teğettir. Bu teğet düzlemi ve değme noktasını belirtiniz.

4.1.20. $f(x,y) = \sqrt{x - e^y}$ nin $(5, 0, 2)$ noktasındaki teğet düzlem denklemini kullanarak $\sqrt{4.98 - e^{-0.03}}$ 'ün yaklaşık değerini bulunuz. Bu yaklaşımdaki hatayı belirtiniz.

4.1.21. $\sqrt{(2.01)^2 + (1.98)^2 + (1.05)^2}$ nin yaklaşık değerini bulunuz.

4.1.22. Kenarları $9, 6$ ve 4 birim olan pirizmanın bu kenarları 9.2, 5.97 ve 4.01 yapılıyor. Hacimdeki değişmeyi yaklaşık olarak bulmak için diferensiyeli kullanınız. Hacimdeki tam değişim nedir?

4.1.23. $z = f(x,y) = 3x^2 - xy$ ise (x,y), $(1,2)$ den $(1.1, 1.98)$ 'e değiştiğinde $f(x,y)$ deki değişim nedir? (x,y) noktasındaki bu değişime göre z deki yaklaşık değişimi bulmak için dz yi kullanınız.

4.1.24. Bir silindirin yarıçapı 3 ve yüksekliği 8 *cm* olarak ölçülüyor. Bu ölçümde ± 0.05 *cm* hatanın yapılması ihtimaline karşılık silindirin hacminde meydana gelebilecek maksimum hatayı bulmak için diferensiyeli kullanınız.

4.1.25.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

ise $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ 'ın mevcut fakat f nin orijinde sürekli olmadığını gösteriniz. f nin grafiğini çiziniz.

4.1.26.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ise f nin $(0,0)$ da diferensiyellenemediğini gösteriniz. $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ mevcut mudur?

4.1.27.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ise f nin $x = 0$ da sürekli fakat $x = 0$ da diferensiyellenemediğini gösteriniz.

4.1.28. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin tanım kümesinde diferensiyellenebildiğini gösteriniz.

$$a)\ f(x,y) = 2xy^2 + x, \quad b)\ f(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

$$c)\ f(x,y) = \frac{1}{2} r \sin 2\theta, \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$e)\ f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

4.1.29. Aşağıdaki fonksiyonların $(0,0)$ noktasında diferensiyellenebilirliğini araştırınız.

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.1.30.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 x + x_2^3 x_3 + x_4 x_5^4 - 5 x_1 x_5$$

'in grafiğine $(4,3,2,1,0)$ noktasında teğet olan düzlemin denklemini bulunuz.

4.1.31. $f(x,y)$, $p_0 = (x_0, y_0)$ noktasında diferensiyellenebilirse f nin belirttiği yüzeyin $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasındaki teğet düzlemin bu noktadan geçen ve yüzey üzerinde olan bütün (düzgün) C eğrilerinin bu noktadaki teğetlerini ihtiva ettiğini gösteriniz.

4.1.32. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir olsun. $f(x) = 0 = f'(x)$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ nin olmadığını farzedelim. $S = \{x : 0 \leq x \leq 1$ ve $f(x) = 0\}$ kümesinin sonlu olduğunu gösteriniz.

4.1.33. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümü için $\mathbf{f}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{f}(\mathbf{x}) + b\mathbf{f}(\mathbf{y})$ ise $\mathbf{f}$ ye lineer denir (Burada $a, b \in \mathbb{R}$ dir. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineer ise o, $f(\mathbf{x}) = a_{x_1} + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$ formundadır). $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer ise $\mathbf{f}$ nin diferensiyellenebildiğini gösteriniz.